kvant.mccme.ru

В. Дубровский

Алгоритм волшебного кубика

Непросто справиться с «венгерским волшебным кубиком» — самой популярной головоломкой XX века. Поэтому нетерпеливые люди. потеряв надеж у на успех, зачастую прекращают свое знакомство с ним разламывая его на кусочки. Говорят, что после появления «кубика» в Японии даже понизилась производительность труда, а в США эту игрушку сейчас продают в комплекте с пластмассовым топориком: не сумел решить — ломай!

Квант относится к кубику Рубика более спокойно и серьезно, о чем свидетельствует публикуемая ниже статья.

В этой статье мы рассказываем, как решить волшебный кубик — знаменитую головоломку Э. Рубика*). Строго говоря, алгоритма решения (то есть набора точных правил для приведения раскраски всех граней из произвольной к одноцветной) мы здесь не приводим — такой алгоритм уже был опубликован в «Кванте» (1980, № 12. с. 17). Вместо этого мы даем большой список полезных комбинаций, указывая для каждой способ выполнения (последовательность поворотов) и результат (какие маленькие кубики переставляются и как). Из различных комбинаций, приводящих к одному и тому же результату, мы старались выбрать самую короткую. В конце статьи мы показываем, что волшебный кубик можно привести в начальное состояние (с одноцветными гранями) за 79 поворотов или меньше.

***)Если у вас нет экземпляра кубика, вы можете его сконструировать, пользуясь указаниями статьи М. Евграфова в «Кванте» 1982, № 3.**

Обозначение операций

Обозначим каждую грань волшебного кубика: *Ф* (фасад), *Т* (тыл), *В* (верх), *Н* (низ), *П* (правая), *Л* (левая) (см. рис.). Поворот грани *X* на $n \cdot 90°$ по часовой стрелке будем обозначать через X^n , например повороты правой грани на 90°, 180°, 270° записываются, как $П$, $П^2$, $П^{-1}=П^3$. Таким образом каждой операции (цепочке поворотов граней) отвечает «слово» из букв *Ф, Т, В, Н, П, Л* со степенями*), читаемое и выполняемое слева направо.

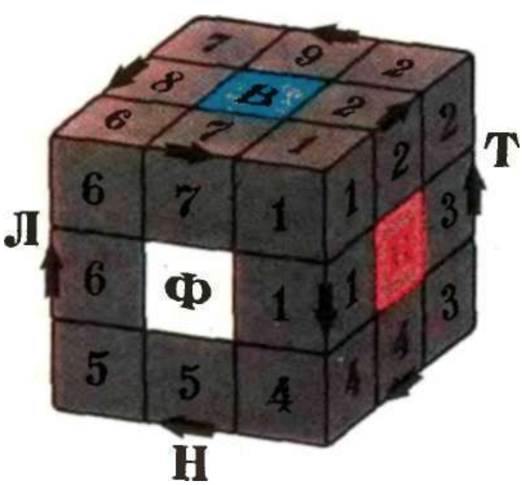
Обозначение результата операции

Мы будем записывать в единой формуле как передвижение маленьких кубиков, так и изменение их ориентации в пространстве.

Для записи передвижений маленьких кубиков перенумеруем угловые кубики и соответствующие вершины числами от 1 до 8, средние (и соответствующие ребра) — числами от 1 до 12 (см. рисунок; записи всех рассматриваемых в статье операций относятся к нумерации, показанной на этом рисунке).

Допустим, что в результате операции *F* первый угловой кубик перешел на место i-го, i-й — на место i_2-го и т. д. Каждый раз в этой цепочке будет появляться новый номер и неизбежно наступит момент, когда

***) Забавный способ запоминания таких «слов» приводится в статье «Венгерский кубик» в журнале «Наука и жизнь», № 3 за 1981 г. (с. 131).**



kvant.mccme.ru

кубик с номером i_{n1} вернется на место первого (почему?). Кубики 1, $i_1,\ldots i_{n1}$ образуют в операции *F цикл,* обозначаемый $(1 i_1,\ldots i_{n1})$- Если еще не все угловые кубики вошли в этот цикл $(n_1<7)$, то берем любой из оставшихся (пусть его номер i_{n+1}) и повторяем тот же процесс — возникнет второй цикл $(i_{n+1}\ldots i_{n2})$. В конце концов запись угловых кубиков окажется разложенной на *независимые* (то есть не имеющие общих элементов) циклы: $(1 i_1,\ldots i_{n1}) \cdot (i_{n+1}\ldots i_{n2})\ldots$

Аналогично обстоит дело со средними кубиками. Соответствующие циклы мы будем записывать в квадратных скобках; так, запись [2 7 6] означает, что второй средний кубик перешел в седьмой, седьмой — в шестой, шестой — во второй.

Пусть в результате некоторой операции i-й средний кубик занял место j-го. Он может расположиться на этом месте двумя способами. Если направление стрелки, привязанной к его ребру (см. рис. 1), окажется противоположным направлению стрелки j-го кубика, то в соответствующем цикле после номера i поставим знак минус. Отсутствие знака означает, что направления стрелок совпали. Так, запись $[2^- 7^+ 6^-]$ (или $[2^- 7\ 6^-]$, «плюсики» мы обычно опускаем для средних кубиков) означает, что второй средний кубик перешел в седьмой с противоположными стрелками, седьмой в шестой с совпадающими стрелками, шестой во второй с противоположными стрелками. Запись $[2^-]$ означает, что второй средний кубик остался на месте, но повернулся на 180°.

Угловой кубик может расположиться на новом месте тремя способами. Соответственно в записи цикла после номера этого кубика будем ставить знак "+", знак "-" или ничего не писать. Знак не пишется, если горизонтальная грань данного углового кубика и после выполнения операции остается горизонтальной. В противном случае, чтобы привести эту грань на новом месте в горизонтальное положение, нам пришлось бы повернуть кубик вокруг диагонали на 120°. Если поворот должен производиться против часовой стрелки, ставим "+", если по часовой стрелке — ставим "-". Скажем, записи (5^+), (5), (5^-) означают, что пятый кубик остается на месте, но поворачивается на 120°, 0°. 240° по часовой стрелке соответственно.

Пояснения к таблице *(см. с. 24)*

Записывая операцию, мы будем сначала писать последовательность поворотов (слово из букв *Ф, Т, В, Н, Л, Л* со степенями), затем знак ~, а потом результат, записанный в виде циклов со знаками. Освоить эту систему записи вам помогут примеры; проверьте, что $П \sim (1^+ 2^- 3^+ 4^-)[1234]$, $B^- \sim (1276)[2^- 9^- 8^- 7^-]$, $Ф^2 \sim (15)(46)[16][57]$, $ПФ \sim (1^+ 2^- 3^- 5^- 6^+)(4^+)[1234567]$, $П^2Ф^2 \sim (135)(264)[136][24][57]$.

В таблице приводится 47 операций, найденных при игре в кубик, иногда методом проб и ошибок, но большей частью с помощью довольно интересных алгебраических рассуждений, которые недостаток места не позволяет воспроизвести здесь. Операции C_{15} и C_{19} заимствованы из «Венгерского средне-школьного журнала», C_{18} — из упомянутой выше статьи в «Науке и жизни».

Схема алгоритма

Первый этап: сборка «столбика» 2x2x3. Назовем «столбиком» совокупность всех маленьких кубиков, не лежащих в двух смежных гранях большого куба, для определенности — *Ф и П.* Для правильной расстановки всех кубиков в «столбике» особых хитростей не требуется. Приведем, например, операции, при которых 1-й средний кубик переходит на 8-е место и в одном случае сохраняет, а в другом меняет свой угол поворота, причем все кубики «столбика», кроме, конечно, 8-го, остаются нетронутыми: $A_1 = ПТВ^2Т^{-1}$, $A_2 = Ф^{-1}ТВТ^{-1}$. Этот этап удается выполнить примерно за 25 ходов.

Второй этап: разворачивание средних кубиков в гранях Ф и П. Легко показать, что при любой последовательности поворотов число средних кубиков, у которых направления стрелок не совпадают с «правильным» (показанным на рисунке), всегда

Таблица полезных операций

Название, описание и результат операции	Число ходов
1) *Перестановки средних кубиков:*	
а) *3-циклы*	
$C_1=Ф^{-1}П^{-1}ФП\sim[125]\cdot(1^{+}2)(45^{-})$	4
$C_2=Ф^{2}П^{-1}Ф^{2}П\sim[126]\cdot(1^{+}2^{-}5^{-}64^{+})$	4
$C_3=ФП^{-1}Ф^{-1}П\sim[127]\cdot(1^{-}4^{-})(2^{+}6^{+})$	4
$C_4=Ф^{2}П^{2}Ф^{2}П^{2}\sim[136]\cdot(135)(264)$	4
$C_5=П^{-1}Ф^{-1}П^{-1}ФП^{2}\sim[235]\cdot(1^{+}5^{+})(2^{-}3^{-})$	5
$C_6=П^{-1}Ф^{2}П^{-1}Ф^{2}П^{2}\sim[236]\cdot(1^{+}2^{-}35^{+}6^{-})$	5
$C_7=П^{-1}ФП^{-1}Ф^{-1}П^{2}\sim[237]\cdot(1^{+}2)(3^{-}6)$	5
$C_8=П^{-1}Ф^{-1}П^{2}ФП^{-1}\sim[245]\cdot(1243^{-}5^{+})$	5
$C_9=П^{-1}Ф^{2}П^{2}Ф^{2}П^{-1}\sim[246]\cdot(13^{+}6^{-})(24^{-}5^{+})$	5
$C_{10}=Ф^{-1}П^{-1}ФП^{-1}Ф^{-1}П^{2}Ф\sim[123]\cdot(1^{-}3)(2^{-}4^{-})$	7
б) *2-циклы*	
$C_{11}=П^{-1}Ф^{-1}П^{-1}ФП^{-1}Ф^{-1}П^{2}Ф\sim[14)(12^{+}34^{-})$	8
$C_{12}=ПНТП^{2}Т^{-1}П^{2}Н^{-1}\sim[12][3^{-}][4^{-}](24^{+}3)(1^{+}5^{+})$	7
в) *поворот средних кубиков*	
$C_{13}=ВФ^{-1}В^{-1}ФП^{-1}ФПФ^{-1}\sim[1^{-}][2^{-}](1^{-}2^{-})(46^{-})$	8
г) *перестановки средних кубиков, не сдвигающие угловых*	
$C_{14}=П^{2}НВ^{-1}Ф^{2}ВН^{-1}\sim[136]$	6
$C_{15}=ВПТЛФВ^{-1}Ф^{-1}Л^{-1}Т^{-1}П^{-1}\sim[1^{-}2^{-}7]$	10
$C_{16}=ПВН^{-1}Ф^{-1}НВ^{-1}\sim[1^{-}6^{-}24^{-}3]$	6
$C_{17}=(П^{2}Ф^{2})^{3}\sim[24][57]$	6
$C_{18}=П^{2}Ф^{2}П^{2}Ф^{2}\cdot \mathit{П}\mathit{В}^{-1}\mathit{П}^{2}\mathit{В}\mathit{Ф}\cdot ПВФ^{2}В^{-1}Ф\sim[2^{-}][7^{-}]$	14
$C_{19}=П^{-1}ВПТЛФВ^{-1}ПВ^{-1}П^{-1}Ф^{-1}Л^{-1}Т^{-1}В\sim[2^{-}][7^{-}]$	14
2) *Перестановки угловых кубиков, не сдвигающие средних*	
а) *3-циклы*	
$Y_1=ВЛВ^{-1}\cdot П^{-1}\cdot ВЛ^{-1}В^{-1}\cdot П\sim(1^{+}2^{+}6^{+})$	8
$Y_2=Л^{-1}ТЛ\cdot Ф^{-1}\cdot Л^{-1}Т^{-1}Л\cdot Ф\sim(12^{-}6^{+})$	8
$Y_3=Ф^{2}П^{2}Ф\cdot Л\cdot Ф^{-1}П^{2}Ф\cdot Л^{-1}Ф\sim(126)$	9
$Y_4=Л^{2}Т^{2}Л^{-1}\cdot Ф^{2}\cdot ЛТ^{2}Л^{-1}\cdot Ф^{2}Л^{-1}\sim(1^{+}26^{-})$	9
$Y_5=ПВ^{2}П\cdot Н\cdot П^{-1}В^{2}П\cdot Н^{-1}П^{2}\sim(12^{+}6^{-})$	9
$Y_6=Л^{-1}ТВ^{2}Т^{-1}ЛТЛ^{-1}В^{2}ЛТ^{-1}\sim(1^{-}2^{-}6^{-})$	10
$Y_7=П^{-1}Т^{2}П\cdot Ф\cdot П^{-1}Т^{2}П\cdot Ф^{-1}\sim(1^{+}7^{+}4^{+})$	8
$Y_8=ФНФ^{-1}\cdot В^{2}\cdot ФН^{-1}Ф^{-1}\cdot В^{2}\sim(17^{+}4^{-})$	8
$Y_9=Ф^{-1}\cdot ПТ^{-1}П^{-1}\cdot Ф\cdot ПТП^{-1}\sim(1^{-}74^{+})$	8
$Y_{10}=Н^{2}Л^{-1}Н^{-1}П^{2}НЛН^{-1}П^{2}Н^{-1}\sim(1^{-}7^{+}4)$	9
$Y_{11}=Т^{-1}НТ^{-1}П^{2}ТН^{-1}Т^{-1}НП^{2}Н^{-1}Т^{2}\sim(174)$	11
$Y_{12}=П^{2}Н^{-1}ЛНП^{2}Н^{-1}Л^{-1}Н\sim(2^{+}4^{-}6)$	8
$Y_{13}=В^{-1}Y_7В\sim(2^{+}4^{+}6^{+})$	10
$Y_{14}=В^{-1}Y_{10}В\sim(246)$	11
б) *разворачивание угловых кубиков*	
$Y_{15}=(ПФ^{-1}Н^{2}ФП^{-1}В^{2})^{2}\sim(2^{-})(6^{+})$	12
$Y'_{15}=П^{-1}Y_{15}П\sim(6^{+})(3^{-})$	14
$Y''_{15}=ПY_{15}П^{-1}\sim(1^{-})(6^{+})$	14
$Y_{16}=Y_9^{-1}\cdot Y_8=ПТ^{-1}П^{-1}Ф^{-1}ПТП^{-1}Ф^{2}НФ^{-1}В^{2}ФН^{-1}Ф^{-1}В^{2}\sim(1^{+})(4^{+})(7^{+})$	15
$Y'_{16}=П^{-1}Y_{16}П\sim(1^{+})(2^{+})(7^{+})$	15
$Y''_{16}=FY_{16}F\sim(1^{+})(3^{+})(7^{+})$, здесь $F=ФН^{-1}Ф^{-1}В^{2}$	15
$Y_{17}=(C_{13})^{2}=(ВФ^{-1}В^{-1}ФП^{-1}ФПФ^{-1})^{2}\sim(1^{+})(2^{+})(4^{-})(6^{-})$	16
$Y_{18}=(C_3C_2)^{2}=(ФП^{-1}Ф^{-1}ПФ^{2}П^{-1}Ф^{2}П)^{2}\sim(1^{-})(2^{+})(4^{+})(5^{+})(6^{+})$	16
и) *3-циклы с разворачиванием*	
$Y_{19}=Л^{-1}ТВ^{2}Т^{-1}ЛН^{2}ТЛ^{-1}В^{2}ЛТ^{-1}Н^{2}\sim(1^{-}2^{-}7^{-})(3^{-})(5^{+})$	12
$Y_{20}=(C_{12})^{2}=(ПНТП^{2}Т^{-1}П^{2}Н^{-1})^{2}\sim(2^{+}34^{+})(1^{-})(5^{-})$	14
г) *пары 2-циклов*	
$Y_{21}=(C_1)^{3}=(Ф^{-1}П^{-1}ФП)^{3}\sim(1^{-}2^{+})(4^{-}5^{+})$	12
$Y_{22}=(C_3)^{3}=(ФП^{-1}Ф^{-1}П)^{3}\sim(14)(26)$	12
$Y_{23}=C_{17}П^{-1}=(Ф^{2}П^{2})^{2}Ф^{2}П(Ф^{2}П^{2})^{2}Ф^{2}П\sim(13)(24)$	12
$Y_{24}=(C_{11})^{2}=(П^{-1}Ф^{-1}П^{-1}ФП^{-1}Ф^{-1}П^{2}Ф)^{2}\sim(1^{+}3^{-})(2^{+}4^{-})$	16

четно. Поэтому после первого этапа в гранях *Ф* и *П* может находиться 2, 4 или 6 таких кубиков. Операция $A_3=НП^{4-n}Н^{-1}$ $(n = 1,2,3)$ «исправляет стрелки» у двух кубиков — 5-го и n-го, а операция $A_4 = НВ^{-1}ПВН^{-1}$ — у четырех (1-, 3-, 5- и 7-го), при этом все кубики «столбика» остаются на местах. Применяя операции типа A_2 и A_4, мы добиваемся того, что стрел-

kvant.mccme.ru

ки всех средних кубиков будут направлены правильно. Для этого нужно не более 8 ходов.

Третий этап: расстановка средних кубиков. На этом этапе будут поворачиваться только грани *Ф* и *П*, поэтому «столбик» и правильные направления стрелок средних кубиков автоматически сохраняются. Можно доказать (это легко сделает каждый, кто знаком с понятием перестановки), что необходимое для этого передвижение 7 средних кубиков записывается в виде композиции не более трех циклов длины 3 и, возможно еще одного поворота; следовательно, 7 средних кубиков граней *Ф* и *П* можно правильно расставить, использовав не более трех операций типа C_1—C_{10}. Более подробный анализ показывает, что этот этап требует не более 14 ходов.

Четвертый этап: расстановка и разворачивание угловых кубиков. Нам осталось расставить и правильно развернуть 6 угловых кубиков граней *Ф* и *П*. Как выше, можно установить, что необходимое передвижение 6 угловых кубиков записывается в виде композиции не более трех циклов длины 3, поэтому для правильной расстановки 6 угловых кубиков нам потребуется не более трех операций типа Y_1 — Y_{14}. После этого можно, применяя операции Y_{15} — Y_{18} правильно повернуть все кубики. Действительно, повернув два кубика с помощью Y_{16}, мы всегда можем уменьшить число неправильно развернутых кубиков на 1 или 2, пока оно больше двух. Когда же останется два таких кубика, они окажутся повернуты в противоположные стороны, и их правильный разворот достигается снова с помощью Y_{16}, Y'_{16} или Y''_{16}. Гораздо рациональнее, пользуясь нашим богатым запасом 3-циклов угловых кубиков, расставлять и разворачивать их одновременно: среди операций, осуществляющих перестановку данных трех кубиков, всегда можно выбрать одну так, чтобы два из них повернулись на нужные нам углы. Не вдаваясь в детали, отметим, что для 4-го этапа хватает 32 ходов и это число наверняка может быть уменьшено.

Итак, общее число ходов в предлагаемом алгоритме теоретически не превосходит 79, но на практике оно оказывается меньше — около 70.

В одном из следующих номеров журнала мы глубже познакомимся с математикой волшебного кубика. Это позволит нам полностью обосновать приведенный выше алгоритм и рассказать о рекордно коротком (по имеющемся данным) алгоритме — на 52 хода.

Игра, задача или спорт?

Эти соревнования очень напоминали состязания штангистов — разминочный зал, помост, за которым — огромное табло, участники, собирающиеся с силами (или с мыслями?) перед подходом к снаряду, судьи, аплодисменты зрителей... Только вместо штанги на помосте был установлен небольшой столик с сенсорным электронным фиксатором времени, табло показывало не килограммы, а секунды, вместо грома железа раздавалось тихое поскрипывание, да и «спортсмены» не отличались могучим телосложением тяжелоатлетов. Здесь, в Будапеште, 5—6 июня проходил первый чемпионат мира по «волшебному кубику Рубика». На него съехались чемпионы 19 стран трех континентов — в основном, школьники и студенты-математики.

Соревнования проходили так: очередной участник на глазах зрителей наугад вытаскивал из чемоданчика, наполненного заранее «запутанными» кубиками, один, изучал его в течение 15 секунд. еще несколько секунд мог, как гимнаст, прокручивать в уме начало комбинации, а затем уже демонстрировал совершенство своего алгоритма и, конечно, ловкость пальцев. Было проведено три серии попыток; в зачет шло лучшее время. За соблюдением правил следило жюри, возглавляемое самим изобретателем головоломки — профессором Э. Рубиком.

Результаты, показанные «гроссмейстерами кубика», поразительны Даже худшее время лишь немногим превышает 55 секунд. (Для сравнения скажем, что нетренированный, но уже знакомый с кубиком человек, пользуясь записью алгоритма, тратит на сборку окаю двух часов) Не обошлось и без казусов: чемпион Финляндии в одной из попыток так спешил, что одни за другим сломал два кубика. А первое место занял шестнадцатилетний американец Мни Тай, его время — 22,95 секунды!

Так что же такое «волшебный кубик» — игра, математическая задача или... новый вид спорта?

В. И.