В. Дубровский

Математика волшебного кубика

«Квант» уже рассказывал подробно о конструкции венгерского «волшебного кубика» и алгоритмах решения этой головоломки*) Вслед за кубиком на свет появилась целая серия похожих на него игр. Математической теории таких игр и посвящена наша статья. А для любителей практической игры в кубик мы приводим принципиальную схему рекордно короткого алгоритма волшебного кубика, основанную на этой теории.

Волшебный кубик задает вопросы

Условимся называть различные варианты сборки волшебного кубика, возникающие при произвольной расстановке 8 угловых маленьких кубиков по вершинам большого куба и 12 средних по ребрам, его *состояниями.* Центральные кубики во всех состояниях расположены одинаково — так же, как в *нулевом состоянии,* когда каждая грань волшебного кубика окрашена в один цвет. Любой слой из 9 маленьких кубиков, примыкающих к одной грани большого куба, разрешено поворачивать на $\pm 90^\circ$ или 180°. Такое вращение будем называть *поворотом грани* или просто *ходом,* а любую последовательность ходов — *операцией.* Если состояние S_2 можно получить из состояния S_1 с помощью некоторой операции, то и от S_2 можно перейти к S_1, изменив направление каждого из поворотов на противоположное и выполняя их в обратном порядке. В этом случае будем говорить, что состояния S_1 и S_2 *связаны.* В частности, состояние, связанное с нулевым (а только в таких состояниях и может пребывать реальный волшебный кубик, если его не разбирать), назовем *законным.*

Задача 1. Докажите, что общее число состояний волшебного кубика равно $N = 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}$ ($n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, читается: n-факториал).

Мы постараемся ответить на следующие вопросы: любое ли состояние куба является законным, то есть можно ли, собрав маленькие кубики в произвольном порядке, получить затем нулевое состояние поворотами граней? Если нет, то как узнать, законно ли данное состояние и вообще, связаны ли два данных состояния? Сколько существует законных

*) «Квант». 1980. № 12. с. 17; 1982. № 3. с. 20 и № 7. с. 22: см. также «Наука и жизнь». 1981, № 3. с. 131 и 1982. № 2. с. 97.

Рис. 1. Нулевое состояние. Скрытый угловой кубик имеет номер 9, скрытые средние — номера 10, 11, 12. На скрытых ребрах стрелки сонаправлены со стрелками на симметричных им относительно центра куба ребрах.

состояний, другими словами — сколько разных раскрасок волшебного кубика можно получить, вращая его грани? Каково максимальное число попарно не связанных состояний? Прежде всего разберемся,

Как задавать состояния.

Чтобы полностью описать состояние волшебного кубика, надо для каждого маленького кубика указать место, которое он занимает, и его ориентацию на этом месте — каждый угловой кубик можно поместить в одно и то же «гнездо» тремя, а средний — двумя способами.

Представим, что волшебный кубик находится в нулевом состоянии. Перенумеруем его вершины и находящиеся в них угловые кубики числами от 1 до 8, а ребра и соответствующие средние кубики — числами от 1 до 12. Кроме того, на каждом ребре большого куба выберем определенное направление (мысленно нарисуем на нем стрелку) и нарисуем стрелку того же направления на соответствующем среднем кубике (рис. 1).

Теперь местонахождение i-го углового (j-го среднего) кубика в состоянии S можно задать номером

$\sigma_S(i)(\tau(j))$ той вершины (того ребра), где он находится (здесь $i=1, \ldots, 8, j=1, \ldots, 12$).

Чтобы задать ориентацию угловых кубиков, выделим пару противоположных граней большого куба. например его горизонтальные грани. Для определенности предположим, что верхний центральный кубик — синий, а нижний — зеленый*). Каждый угловой кубик имеет либо одну грань синего цвета, либо одну грань зеленого цвета; угол α ($\alpha=0°$. 120°или 240°), на который следовало бы повернуть этот кубик в его «гнезде» вокруг диагонали большого куба против часовой стрелки**), чтобы эта (синяя либо зеленая) грань стала горизонтальной, будем называть *углом поворота* данного углового кубика в состоянии S и обозначать $\alpha_S(i)$, где i — номер кубика.

Ориентацию j-го среднего кубика в состоянии S зададим углом $\beta_S(j)$ между нарисованной на нем стрелкой и направлением ребра, на котором он находится ($\tau_S(j)$-го ребра). Угол $\beta_S(j)$ может равняться 0° или 180°; будем называть его *углом поворота* j-го среднего кубика в состоянии S.

Что общего у связанных состояний

Нам надо выяснить, в каком случае два состояния связаны друг с другом. С этой целью проследим, как изменяются характеристики состояний α_S, β_S, σ_S и τ_S при поворотах граней. Начнем с углов поворотов. Легко проверить, что

А. Углы поворотов угловых кубиков не изменяются при поворотах четырех вертикальных граней на 180° и при произвольных поворотах горизонтальных граней.

Б. Углы поворотов средних кубиков не изменяются при поворотах двух противоположных (правой и левой на рис. 1) граней на 180° и при произвольных поворотах остальных граней.

В. При повороте любой вертикальной грани на $\pm 90°$ к углам поворотов α_S двух кубиков, стоящих в ее противоположных вершинах, добавляется по 120°***), а к углам

*) Между прочим, кубик раскрашивают по-разному. Мы имеем в виду куб, у которого Зеленая и синяя грани противоположны.

**) Разумеется, не разрушая волшебный куб, реально повернуть его угловой кубик в своем гнезде нельзя — мы здесь определяем теоретическое понятие.

***) Как это принято, углы поворотов мы складываем с точностью до 360° например 240° + + 240°=120°, 180° + 180°=0° и т. д.

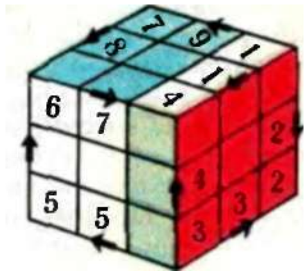

Рис. 2. После поворота правой грани на 90° по часовой стрелке. Здесь $\tau(1)=2$, $\tau(4)=1$, $\tau(2)=3$. $\alpha(1)=\alpha(3)=120°$, $\alpha(2)=\alpha(4)=240°$. $\beta(1)=\beta(2)=\beta(3)=\beta(4)=180°$.

поворотов двух ее других угловых кубиков добавляется по 240°.

Г. При повороте правой или левой (рис. 2) грани на ±90° меняются углы поворотов всех четырех средних кубиков этой грани.

Отсюда немедленно вытекает, что *суммы углов поворотов всех угловых и всех средних кубиков*

$A(S)=\alpha_S(1)+\alpha_S(2)+\ldots+\alpha_S(8)$,
$B(S)=\beta_S(1)+\beta_S(2)+\ldots+\beta_S(12)$

остаются постоянными при всех поворотах граней. Такие характеристики состояния называются *инвариантами* (от латинского «не изменяющийся»). Значения любого инварианта для двух связанных состояний S_1 и S_2, очевидно, совпадают. Поэтому равенства $A(S_1)=A(S_2)$ и $B(S_1)=B(S_2)$ являются необходимыми условиями связанности состояний. Вскоре мы увидим, что, присоединив к ним аналогичное равенство для еще одного инварианта, мы получим и достаточные условия. Но, прежде чем определить этот третий инвариант, нам придется сделать небольшое отступление.

О перестановках

Перестановкой конечного множества называется любое отображение этого множества на себя. Таким образом, определенная выше функция σ_S, заданная на множестве {1, ... 8}, является перестановкой этого множества, а τ_S — перестановка множества {1, ..., 12}. С любой операцией F также связаны две перестановки σ_F и τ_F этих же множеств: если нулевое состояние S_0 переводится операцией F в состояние S, то, по определению, $\sigma_F(i)=\sigma_S(i)$, $\tau_F(j)=\tau_S(j)$. Другими словами, $\sigma_F(i)$ и $\tau_F(j)$ — это номера тех мест (см. рис. 1), которые занимают в результате операции F угловой кубик, стоявший на i-м месте, и средний кубик, стоявший на j-м месте.

Выполнив одну за другой перестановки σ_1 и σ_2 одного и того же множества, мы снова получим его отображение на себя — перестановку σ. Она называется *композицией* σ_1 и σ_2: $\sigma=\sigma_1\circ\sigma_2$.

Задача 2. Пусть операция F переводит волшебный кубик из состоянии S в состояние S'. Докажите, что $\sigma_{S'}=\sigma_S\circ\sigma_F$, $\tau_{S'}=\tau_S\circ\tau_F$. Докажите также, что $\sigma_{F_1\circ F_2}=\sigma_{F_1}\circ\sigma_{F_2}$, $\tau_{F_1\circ F_2}=\tau_{F_1}\circ\tau_{F_2}$, где $F_1\circ F_2$ — композиции операций F_1 и F_2.

Пусть σ - произвольная перестановка множества {1, 2, . . . , n}. Нарисуем одну под другой две строчки по n точек. Если при перестановке σ число i переходит в j, соединим i-ю точку верхней строки отрезком с j-й точкой нижней строки — мы получим *граф перестановки* σ (рис. 3). Обозначим через $N(\sigma)$ число точек пересечения отрезков графа (точку, в которой пересекается больше двух отрезков, сосчитаем столько раз, сколько пар отрезков ее содержит). Перестановка σ называется *четной (нечетной),* если

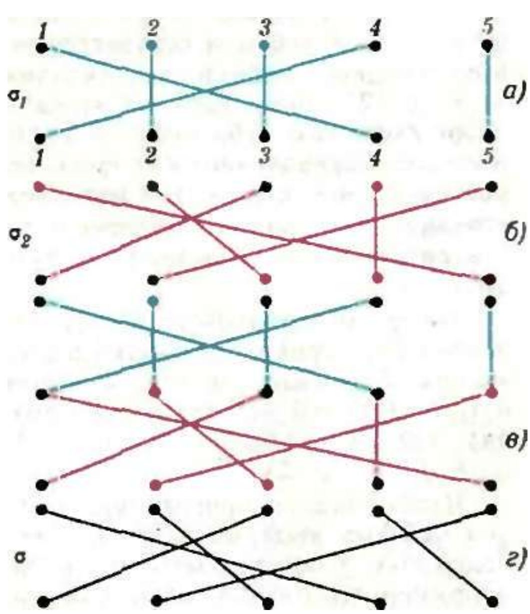

Рис. 3.

число $N(\sigma)$ четно (нечетно). *Знак перестановки* σ определим равенством $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$; $\varepsilon(\sigma)$ равно 1 или -1 в зависимости от того, четна или нечетна перестановка. Выясним, как зависит четность композиции $\sigma_1 \circ \sigma_2$ от четностей σ_1 и σ_2. Граф композиции строится очень просто (см. рис. 3): совмещаем нижнюю строку графа перестановки σ_1 (рис. 3, а) с верхней строкой графа σ_2 (рис. 3, б) — получается «промежуточный» граф (рис. 3, в), а затем заменяем каждую ломаную в промежуточном графе на отрезок, соединяющий ее концы (рис. 3, г). Число точек пересечения ломаных в промежуточном графе, очевидно, равно $N(\sigma_1) + N(\sigma_2)$. При «распрямлении» ломаных оно может уменьшиться, но его четность сохранится (докажите это самостоятельно). Таким образом, $N(\sigma_1 \bullet \sigma_2)$ и $N(\sigma_1) + N(\sigma_2)$ — числа одной четности; следовательно,

$$\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = (-1)^{N(\sigma_1 \circ \sigma_2)} = (-1)^{N(\sigma_1)+N(\sigma_2)} = (-1)^{N(\sigma_1)} \times (-1)^{N(\sigma_2)} = \varepsilon(\sigma_1) \circ \varepsilon(\sigma_2).$$

Другими словами, *композиция двух перестановок четна, если их четности совпадают, и нечетна в противном случае.*

Допустим, что перестановка σ множества из n элементов оставляет неподвижными $n-m$ элементов, а остальные m элементов можно упорядочить так, что первый из них переходит во второй, второй — в третий и, вообще, i-й — в $(i+1)$-й, а m-й элемент — опять в первый. Тогда перестановка σ называется *циклом длины* m или m-*циклом.* Например, перестановки σ_1, σ_2 и σ, графы которых изображены на рисунках 3, *а, б, г,* являются циклами длины 2, 4 и 5 соответственно.

Задача 3. Докажите, что

а) Любая *транспозиция* (то есть 2 цикл) является нечетной перестановкой.

б) Любой я цикл является композицией n-1 транспозиций. Его четность противоположна четности числа n

в) Любую перестановку можно представить в виде композиции циклов, причем можно обойтись только транспозициями, а в случае четных перестановок — 3-циклами.

Полная система инвариантов волшебного кубика

Назовем *знаком состояния* S число $\varepsilon(S) = \varepsilon(\sigma_S) \circ \varepsilon(\tau_S)$. Оно равно 1 или - 1 в зависимости от того, совпадают или нет четности перестановок σ_S и τ_S.

Рассмотрим поворот F любой грани на 90° Пусть в результате этого поворота волшебный кубик перешел из состояния S в состояние S'. Тогда (задача 2) $\sigma_{S'} = \sigma_S \circ \sigma_F$, $\tau_{S'} = \tau_S \circ \tau_F$. Перестановки σ_F и τ_F — это 4-циклы, поэтому они нечетны (задача 3, б) и $\varepsilon(\sigma_F) = \varepsilon(\tau_F) = -1$. Следовательно, $\varepsilon(\sigma_{S'}) = \varepsilon(\sigma_S) \times \varepsilon(\sigma_F) = -\varepsilon(\sigma_S)$, $\varepsilon(\tau_{S'}) = -\varepsilon(\tau_S)$ и $\varepsilon(S') = \varepsilon(S)$. Итак, знак состояния не меняется при поворотах граней. Это и есть третий инвариант.

Докажем, что *система инвариантов* $A(S)$, $B(S)$ и $\varepsilon(S)$ — *полная,* то есть, что *совпадение их значений для двух состояний обеспечивает связанность этих состояний.*

Пусть дли начала $A(S) = B(S) = 0°$. $\varepsilon(S) = 1$. Покажем, что состояние S связано с нулевым состоянием S_0. Попробуем воспользоваться алгоритмом из статьи «Алгоритм волшебного кубика» («Квант» № 7 за этот год)*). Первый его этап всегда можно выполнить беспрепятственно. Второй выполним при условии, что число неправильно повернутых средних кубиков четно. Так и будет, ибо сумма углов поворота средних кубиков $B=0°$. Третий этап осуществим всегда. После него волшебный кубик переходит в состояние S', в котором все средние кубики стоят на своих местах, то есть $\tau_{S'}$ — тождественная перестановка. Но $\varepsilon(S') = 1$; значит, $\sigma_{S'}$ — четная перестановка, а она разлагается в композицию 3-циклов (задача 3. *в).* Поэтому все угловые кубики мы сумеем расставить но местам. Останется правильно развернуть их. А это можно сделать, пользуясь операциями, указанным в алгоритме, благодаря тому, что сумма углов поворотов $A = 0°$.

Пусть далее $A(S_1) = A(S_2) = \alpha$, $B(S_1) = B(S_2) = \beta$, $\varepsilon(S_1) = \varepsilon(S_2) = \varepsilon$. Если $\alpha = \beta = 0°$, а $\varepsilon = 1$, то оба состояния S_1 и S_2 связаны с нулевым; следовательно, они связаны друг с другом. Наконец, пусть S_1 и S_2 — «незаконные» состояния, например $\alpha = 0°$, $\beta = 180°$, $\varepsilon = 1$. Рассмотрим состояния S'_1 и S'_2, получающиеся из S_1 и S_2 переворачиванием какого-то одного среднего кубика, скажем сине-белого. Инварианты A и ε при этом, конечно, не меняются, а B становится равным 0°, поэтому S'_1 и S'_2 связаны. Возьмем волшебный кубик в состоянии S_1 и заклеим синюю

*) Разумеется, можно применить и любой другой алгоритм

грань выбранного среднего кубика белой наклейкой, а белую — синей. Получим состояние S'_1. Переведем его в S'_2 и снимем наклейки — получится состояние S_2! Следовательно, состояния S_1 и S_2 связаны. Аналогично доказывается, что любые два состояния с одинаковыми инвариантами связаны. Таким образом, каждый из $3\times2\times2=12$ наборов значений инвариантов *A, B* и ε *(A* принимает три значения: 0°, 120° и 240°, *B* — два: 0° и 180°, ε — тоже два: 1 и - 1) определяет класс попарно связанных состояний с этим набором инвариантов, причем состояния из разных классов не связаны; один из классов образован законными состояниями.

Задача 4. Докажите, что число состояний во всех классах одинаково и равно $8!\cdot 3^8 \cdot 11!\cdot 2^{12}$.

Задача 5. Докажите, что значения инвариантов *A*, *B*, ε зависят только от состояния волшебного кубика, но не от выбора пары граней, направлений на ребрах и нумерации вершин и ребер.

Рекордный алгоритм

В журнале «Сайентифик Америкэн» (1981 г., № 3) описана общая идея рекордно короткого алгоритма волшебного кубика, придуманного английским математиком М. Тистлетуэйтом. Пользуясь этим алгоритмом, можно перейти от любого законного состояния к нулевому не более, чем за 52 хода*). Алгоритм Тистлетуэйта коренным образом отличается от алгоритмов, которые описаны в упомянутых нами выше статьях. В общих чертах его схема такова.

Введем три ограничения на допустимые повороты граней:

1) запрещается поворачивать две противоположные вертикальные грани (допустим, правую и левую на рис. 1) на $\pm 90°$;

2) запрещается поворачивать какую бы то ни было вертикальную грань на $\pm 90°$;

3) запрещаются все повороты граней на $\pm 90°$.

Обозначим через Φ_1, Φ_2, Φ_3 совокупность всех операций, удовлетворяющих первому, второму, третьему ограничению соответственно (например, Φ_3 - это всевозможные последовательности поворотов граней на 180°), а через Σ_1, Σ_2, Σ_3 — класс всех состояний, получаемых из нулевого операциями из Φ_1, Φ_2, Φ_3. Ясно, что $\Sigma_1 \supset \Sigma_2 \supset \Sigma_3 \ni S_0$ и что любые два состояния из класса Σ_* связаны друг с другом операцией из Φ_*. Весь алгоритм разбивается на четыре этапа. На первом выполняется такая операция *F* (без ограничений на ходы), которая переводит исходное состояние *S* в какое-нибудь состояние $S_1 \in \Sigma_1$. В дальнейшем разрешаются только операции из Φ_1. На втором этапе с помощью операции $F_1 \in \Phi_1$ волшебный кубик переводится в состояние $S_2 \in \Sigma_2$, на третьем с помощью операции $F_2 \in \Phi_2$ — в состояние $S_3 \in \Sigma_3$. Наконец, на четвертом этапе, вращая грани только на 180°, мы должны получить из состояния S_3 нулевое состояние S_0.

Очевидно, попав после очередного этапа в класс Σ_*, мы его уже не покидаем, так что достижения всех предыдущих этапов сохраняются автоматически. Кроме того, вплоть до последнего этапа не нужно «загонять» маленькие кубики на положенные места. Но основное достоинство этой схемы в том, что она гораздо лучше обычных приспособлена к просчету на ЭВМ. Вероятно, это и сыграло решающую роль при «установлении мирового рекорда».

Прежде, чем составлять по этой схеме алгоритм, надо выяснить, что из себя представляют классы состояний Σ_1, Σ_2, Σ_3. Тут-то нам и пригодятся инварианты. С классами Σ_1 и Σ_2 разобраться легко. Вспоминая свойства *А* и *Б* углов поворотов маленьких кубиков, мы видим, что *углы поворотов средних кубиков* $\beta_S(j)$ *инвариантны относительно операций из* Φ_1 (свойство *Б*), *углы поворотов угловых кубиков* $\alpha_S(i)$ *инвариантны относительно операций из* Φ_2 (свойство *А)*. Легко заметить также, что при операциях из Φ_2 четыре средних кубика, расположенных в горизонтальном «среднем слое» между верхней и нижней гранями, могут меняться местами только между собой, так что состав этого слоя остается неизменным.

Задача 6. Докажите, что величины $A(S)$, $\varepsilon(S)$ и $\beta_j(S)$ ($j=1, \ldots 12$) образуют полную систему инвариантов относительно операций из Φ_1, а $\varepsilon(S)$, $\alpha(S)$ ($i = 1, \ldots 8$), $\beta_j(S)$ ($j=1, \ldots, 12$) и состав горизонтального среднего слоя — относительно операций из Φ_2.

Столь же просто убедиться, что при операциях из Φ_3, кроме инвариантов, перечисленных в задаче 6, сохраняются также составы двух вертикальных средних слоев и составы двух четверок угловых кубиков, образующих правильные тетраэдры (на рис. 1 в одну

*) В том же журнале сообщается, что в действительности всегда достаточно 23 ходов (!), причем уменьшить это число нельзя. Судя по всему, пока столь короткий реальный алгоритм решения кубика не найден.

из них входят угловые кубики 1, 3, 5, 7, а в другую — 2, 4, 6, 8). Но это еще не все! Имеется еще один инвариант относительно набора операций Φ_3, описывающий зависимость между перестановками угловых кубиков внутри четверок. Возьмем любые два кубика одной из четверок. Они оба прилежат ровно к одной из граней куба. Если это правая или левая грань, то скажем, что эти кубики занимают *1-ю позицию,* если передняя или задняя — то *2-ю.* если верхняя или нижняя — то *3-ю.* Ясно, что вторая пара кубиков этой четверки всегда занимает ту же позицию, что и первая. Для простоты ограничимся состояниями S, у которых состав четверок «правильный» (как в нулевом состоянии). Рассмотрим первую четверку и определим перестановку p_S множества {1, 2, 3}, полагая $p_S(i)=j$, если пара кубиков этой четверки, занимавшая i- ю позицию в состоянии S_0, занимает j-ю позицию в состоянии S. Аналогично, для второй четверки определим перестановку q_S. Наш последний инвариант — это перестановка $\delta_S=p_S \circ q_S^{-1}$*). Он может принимать любое из $3!=6$ значений.

Задача 7. Докажите, что δ_S действительно инвариант относительно Φ_3 и что вместе с инвариантами, перечисленными выше, он образует полную систему для Φ_3.

Теперь ясно, что на каждом этапе алгоритма следует стремиться к тому, чтобы значения очередной порции найденных нами инвариантов стали такими же, как для нулевого состояния.

Мы предлагаем читателям самостоятельно разработать алгоритм или его отдельные этапы по указанной схеме и прислать в редакцию свои варианты. Лучшие из них будут опубликованы.

Поиграем в другие игры

Даже неискушенные в математике люди сразу признают в волшебном кубике «родственника» знаменитой головоломки «15» Сэма Лойда, хотя внешне они совершенно не похожи. Сходство заключено в общей структуре этих игр, которую можно описать так: имеется некая система, способная пребывать в различных *состояниях,* среди которых одно («нулевое») состояние выделено. Задача состоит в том, чтобы перевести произвольное заданное состояние в нулевое, пользуясь определенным набором стандартных преобразований системы (в случае волшебного кубика — поворотами граней на $\pm 90°$ или 180°), которые можно назвать *элементарными операциями* или *ходами.* При этом любой ход *обратим* (то есть, сделав его, мы всегда можем одним ходом вернуться в исходное состояние).

Так же, как и для волшебного кубика, в общем случае определяются понятия операции, связанных состояний, инварианта. Еще одно полезное понятие — *орбита состояния:* так называют множество всех состояний, связанных с данным. В частности, как мы видели, множество состояний волшебного кубика распадается на 12 орбит.

Мы предлагаем читателю ряд задач, посвященных исследованию игр указанного типа. В задачах 8—10 требуется доказать некоторые общие свойства этих игр (приводятся только их формулировки). В задачах 11—16 рассматриваются разные примеры, причем дается только описание игры, а ответить нужно на следующие вопросы: 1) каков полный набор инвариантов данной игры? 2) как перевести одно ив двух связанных состояний в другое? 3) каково число орбит и состояний в одной орбите?

Задачи

8. Будем писать $S_1 <\sim> S_2$, если состояния S_1 и S_2 связаны. Тогда для любых состояний S_1, S_2, S_3 1) $S_1 <\sim> S_1$ 2) $S_1 <\sim> S_2 \Rightarrow S_2 <\sim> S_1$. 3) $S_1 <\sim> S_2, S_2 <\sim> S_3 \Rightarrow S_1 <\sim> S_3$. Другими словами, отношение $S_1 <\sim> S_2$ есть отношение эквивалентности.

9. Орбиты любых двух состояний S_1 и S_2 либо совпадают (если $S_1 <\sim> S_2$), либо не имеют общих элементов.

10. Если всякая операция, переводящая в себя хотя бы одно состояние, переводит в себя и любое другое состояние, то число N_0 состояний во всех орбитах одинаково, а число всех состояний $N=N_0 \cdot k$, где k — число орбит. Проверьте, что указанное свойство операций справедливо для волшебного кубика.

11. Исследуйте игры, отличающиеся от «волшебного кубика» только набором элементарных операций: 1) разрешено вращать только 2 (3, 4 или 5) грани; 2) ход — это поворот пары противоположных граней (одной по, а другой против часовой стрелки) на один и тот же угол; 3) соответственно, обе грани по часовой стрелке.

(Окончание см. на с. 48)

*) Здесь q_S^{-1} обозначает обратное отображение к отображению q_S.

Математика волшебного кубика

(Начало см. на с. 22)

12. «Перекрашенный кубик». Элементарные операции прежние, но 1) на каждом центральном кубике нарисована стрелка регистрирующая его повороты; 2) куб покрашен в три цвета так, что цвета противоположных граней в нулевом состоянии одинаковы.

13. «Волшебный параллелепипед n x m x x k». Описание этой игры должно быть ясным из названия. Разумеется, неквадратные грани можно поворачивать только на 180°, и вращаются не только грани, но и внутренние слои. Даже среди 9 вариантов, отвечающих n, m, k<3, имеются отнюдь не тривиальные. Вариант 3x3x2 выпускается в Венгрии под названием «Домино». Недавно в Венгрии стал выпускаться кубик 4x4x4 под замечательным названием «Месть Рубика»!

14. «Волшебный кубик 3x3x3x3». (Для тех. кто немного знаком с четырехмерной геометрией.)

15. «Волшебный многогранник». В вершинах и в серединах ребер произвольного многогранника располагаются шарики разных цветов (число цветов равно общему числу вершин и ребер многогранника). За одни ход разрешается циклически переставить все шарики одной грани. Состояние здесь полностью описывается перестановками σ_s и τ_s.

16. «Волшебный тетраэдр». Нулевое состояние — правильный тетраэдр, каждая грань которого окрашена в один из четырех цветов. При «поворотах граней» перемещается 4 угловых и 6 реберных «элементов», форму которых уточнять не будем. Важно, что здесь, кроме перестановок, надо учитывать и их ориентацию. Другие варианты получаются с октаэдром, додекаэдром и икосаэдром.